द्विपद प्रमेय

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» द्विपद विस्तार की आवश्यकता और परिचय

प्रश्न 1 (आसान). $(x + y)^2$ का विस्तार करो.

उत्तर – $x^2 + 2xy + y^2$

प्रश्न 2 (आसान). $(p + q)^1$ का विस्तार करो.

उत्तर – $p + q$

प्रश्न 3 (मध्यम). अगर तुम्हें $(102)^3$ का मान निकालना हो, तो द्विपद प्रमेय के लिए इसे तुम कौन से 'द्विपद' में बदलोगे?

उत्तर – $(100 + 2)^3$

» द्विपद विस्तार के प्रारंभिक प्रेक्षण

प्रश्न 4 (आसान). अगर (x+y) का विस्तार किया जाए, तो उसमें कुल कितने पद होंगे?

उत्तर – 6 पद

प्रश्न 5 (आसान). द्विपद विस्तार (2p+3q) के तीसरे पद में '2p' की घात क्या होगी?

उत्तर – 2

प्रश्न 6 (मध्यम). द्विपद विस्तार $(x-y)^3$ के प्रत्येक पद में x और y की घातों का योग क्या होगा?

उत्तर – 3

प्रश्न 7 (कठिन). अगर किसी द्विपद विस्तार में 7 पद हैं, तो मूल द्विपद की घात क्या रही होगी?

उत्तर – 6

» पास्कल त्रिभुज

प्रश्न 8 (आसान). पास्कल त्रिभुज की घात 2 (power 2) वाली पंक्ति के गुणांक क्या होंगे?

उत्तर – 1, 2, 1

प्रश्न 9 (आसान). पास्कल त्रिभुज में हर पंक्ति कहाँ से और कहाँ पर समाप्त होती है?

उत्तर – हर पंक्ति 1 से शुरू होती है और 1 पर समाप्त होती है।

प्रश्न 10 (मध्यम). पास्कल त्रिभुज का उपयोग करके (a+b) का विस्तार ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $(a+b) = a + 5ab + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab + b$

प्रश्न 11 (कठिन). पास्कल त्रिभुज की घात 6 (power 6) वाली पंक्ति लिखिए।

उत्तर – 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

» संचय का उपयोग करके द्विपद गुणांक

प्रश्न 12 (आसान). $(a+b)^2$ के लिए द्विपद गुणांक क्या हैं?

उत्तर – ^1C, ^1C = 1, 1

प्रश्न 13 (आसान). ^3C का मान क्या है?

उत्तर – 3

प्रश्न 14 (मध्यम). (x+y) के लिए द्विपद गुणांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर – C, C, C, C, C, C = 1, 5, 10, 10, 5, 1

प्रश्न 15 (कठिन). अगर किसी द्विपद विस्तार में 7 पद हैं, तो 'n' का मान क्या होगा? और उसके गुणांक कैसे लिखोगे?

उत्तर – n=6 होगा। गुणांक 'C, C, C, C, C, C, C' होंगे।

» धन पूर्णांक घातों के लिए द्विपद प्रमेय का सूत्र

प्रश्न 16 (आसान). $(x+y)^2$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर – $x^2 + 2xy + y^2$

प्रश्न 17 (आसान). $(a+1)^3$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर – $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

प्रश्न 18 (मध्यम). $(3x-2)^3$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर – $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

प्रश्न 19 (कठिन). (2a + b/2) का विस्तार कीजिए।

उत्तर – $16a + 16a^3b + 6a^2b^2 + ab^3/2 + b/16$

» द्विपद प्रमेय की उपपत्ति (गणितीय आगमन सिद्धांत)

प्रश्न 20 (आसान). गणितीय आगमन सिद्धांत में, पहला चरण किसके लिए सिद्ध किया जाता है?

उत्तर – n = 1

प्रश्न 21 (आसान). गणितीय आगमन सिद्धांत के दूसरे चरण में हम क्या करते हैं?

उत्तर – n = k के लिए कथन को सत्य मानते हैं।

प्रश्न 22 (मध्यम). गणितीय आगमन सिद्धांत का उपयोग करके, द्विपद प्रमेय की उपपत्ति में कौन सी 'identity' का उपयोग किया जाता है?

उत्तर – Pascal's Identity: kCr + kC(r-1) = (k+1)Cr

प्रश्न 23 (कठिन). द्विपद प्रमेय की उपपत्ति में, n=k+1 के लिए सिद्ध करते समय, (a+b) * (a+b)^k के विस्तार में कौन-से पदों को एक साथ 'group' किया जाता है?

उत्तर – समान 'power' वाले 'a' और 'b' के पदों को 'group' किया जाता है, जैसे a^r b^(k+1-r) वाले पद।

» द्विपद प्रमेय के प्रेक्षण और गुण

प्रश्न 24 (आसान). व्यंजक (a + b)^7 के प्रसार में कितने पद होंगे?

उत्तर – 8 पद

प्रश्न 25 (आसान). व्यंजक (x - y)^10 में 'x' की घात किस मान से शुरू होकर किस पर खत्म होगी?

उत्तर – 10 से शुरू होकर 0 पर खत्म होगी।

प्रश्न 26 (मध्यम). अगर (3p + 2q)^6 के किसी पद में 'p' की घात 4 है, तो 'q' की घात क्या होगी? और उस पद में 'p' और 'q' की घातों का योग क्या होगा?

उत्तर – q की घात 2 होगी, और घातों का योग 4 + 2 = 6 होगा।

» द्विपद प्रमेय की विशिष्ट स्थितियाँ

प्रश्न 27 (आसान). $(1 + 2x)^3$ का प्रसार कीजिए।
उत्तर – $1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$

प्रश्न 28 (आसान). $(x - 1)$ के प्रसार में तीसरा पद ज्ञात कीजिए।
उत्तर – $10x^3$

प्रश्न 29 (मध्यम). $(1 - x/2)$ का प्रसार कीजिए।
उत्तर – $1 - 2x + (3/2)x^2 - (1/2)x^3 + (1/16)x$

प्रश्न 30 (कठिन). $(1 + x) + (1 - x)$ का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – $2(1 + 10x^2 + 5x)$

» द्विपद प्रमेय का उपयोग करके विस्तार

प्रश्न 31 (आसान). $(x + 2)^3$ का विस्तार कीजिए।
उत्तर – $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

प्रश्न 32 (आसान). $(1 - y)$ का विस्तार कीजिए।
उत्तर – $1 - 4y + 6y^2 - 4y^3 + y$

प्रश्न 33 (मध्यम). $(2a - 3b)^3$ का विस्तार कीजिए।
उत्तर – $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

प्रश्न 34 (कठिन). (99) का मान द्विपद प्रमेय से ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 9509900499

» संख्यात्मक गणनाओं में द्विपद प्रमेय का अनुप्रयोग

प्रश्न 35 (आसान). द्विपद प्रमेय का उपयोग करके $(102)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 10404

प्रश्न 36 (आसान). द्विपद प्रमेय का उपयोग करके $(99)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 9801

प्रश्न 37 (मध्यम). द्विपद प्रमेय का उपयोग करके (98) का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 92236816

प्रश्न 38 (कठिन). द्विपद प्रमेय का उपयोग करके $(1.02)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 1.061208

» विभाज्यता समस्याओं में द्विपद प्रमेय का अनुप्रयोग

प्रश्न 39 (आसान). द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि 7^n - 1, 6 से विभाज्य है।
उत्तर – 7^n - 1 = (1+6)^n - 1 = (1 + nC1∗6 + nC2∗6^2 + ...) - 1 = nC1∗6 + nC2∗6^2 + ... = 6(nC1 + nC2∗6 + ...), जो 6 से वभिाज्य है।

प्रश्न 40 (आसान). सिद्ध कीजिए कि 8^n - 1, 7 से विभाज्य है।
उत्तर – 8^n - 1 = (1+7)^n - 1 = (1 + nC1∗7 + nC2∗7^2 + ...) - 1 = 7(nC1 + nC2∗7 + ...), जो 7 से विभाज्य है।

प्रश्न 41 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि 5^(2n) - 1, 24 से विभाज्य है।
उत्तर – 5^(2n) - 1 = (25)^n - 1 = (1+24)^n - 1 = (1 + nC1∗24 + nC2∗24^2 + ...) - 1 = 24(nC1 + nC2∗24 + ...), जो 24 से विभाज्य है।

प्रश्न 42 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि 3^(2n+2) - 8n - 9, 64 से विभाज्य है।

उत्तर – 3^(2n+2) - 8n - 9 = 9^(n+1) - 8n - 9. (1+8)^(n+1) - 8n - 9 = (1 + (n+1)8 + (n+1)n/2 * 64 + ...) - 8n - 9 = 1 + 8n + 8 + 64K - 8n - 9 = 64K. अतः, यह 64 से वभिाज्य है।

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. हमें $(a + b)^3$ का प्रसार करना है बिना सीधे गुणा किए, द्विपद प्रमेय का विचार लेते हुए.

› हमें पता है कि $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$.

› अब हमें हर 'a' या 'b' को गुणा करके देखना है कि 'a' और 'b' की कितनी घातें मिलकर '3' बनाती हैं.

› जैसे, a^3 (a तीन बार), a^2b (a दो बार, b एक बार), ab^2 (a एक बार, b दो बार), b^3 (b तीन बार).

› इनके गुणांक निकालने के लिए हमें बाद में पास्कल का त्रिभुज या संचय (combination) इस्तेमाल करना सीखेंगे, पर अभी के लिए हम जानते हैं कि $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

उत्तर – $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

उदाहरण 2. द्विपद $(a+b)^3$ के विस्तार में पदों की संख्या, 'a' और 'b' की घातों का पैटर्न और प्रत्येक पद में घातों का योग ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले हम $(a+b)^3$ का विस्तार करते हैं: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$।

› अब, पदों की संख्या देखते हैं। यहाँ 4 पद हैं (a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3)। मूल घात 3 थी, तो पदों की संख्या = 3 + 1 = 4।

› 'a' की घात का पैटर्न देखते हैं: पहले पद में a^3, फिर a^2, फिर a^1, और अंत में a (जो लिखा नहीं जाता)। यह 3 से 0 तक घट रहा है।

› 'b' की घात का पैटर्न देखते हैं: पहले पद में b (जो लिखा नहीं जाता), फिर b^1, फिर b^2, और अंत में b^3। यह 0 से 3 तक बढ़ रहा है।

› प्रत्येक पद में 'a' और 'b' की घातों का योग देखते हैं: पहले पद में 3+0 = 3, दूसरे में 2+1 = 3, तीसरे में 1+2 = 3, और चौथे में 0+3 = 3। यह हर बार मूल घात (3) के बराबर है।

उत्तर – पदों की संख्या 4 है। 'a' की घात 3 से 0 तक घटती है और 'b' की घात 0 से 3 तक बढ़ती है। प्रत्येक पद में 'a' और 'b' की घातों का योग हमेशा 3 होता है।

उदाहरण 3. पास्कल त्रिभुज का उपयोग करके (x+y) का विस्तार ज्ञात कीजिए।

› पहले हम पास्कल त्रिभुज की घात 4 (power 4) वाली पंक्ति ढूंढेंगे।

› पास्कल त्रिभुज ऐसे बनता है: सबसे ऊपर 1 (power 0).

› अगली पंक्ति (power 1) के लिए, 1 और 1.

› फिर (power 2) के लिए, 1, (1+1)=2, 1.

› फिर (power 3) के लिए, 1, (1+2)=3, (2+1)=3, 1.

› और अब (power 4) के लिए: 1, (1+3)=4, (3+3)=6, (3+1)=4, 1.

› तो, हमें गुणांक मिले: 1, 4, 6, 4, 1.

› अब इन्हीं गुणांकों का उपयोग करके (x+y) का विस्तार लिखेंगे: 'x' की घात 4 से शुरू होगी और घटती जाएगी, 'y' की घात 0 से शुरू होकर बढ़ती जाएगी।

› पहला पद: $1 * x * y = x$

› दूसरा पद: $4 * x^3 * y^1 = 4x^3y$

› तीसरा पद: $6 * x^2 * y^2 = 6x^2y^2$

› चौथा पद: $4 * x^1 * y^3 = 4xy^3$

› पांचवां पद: $1 * x * y = y$

उत्तर – $(x+y) = x + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y$

उदाहरण 4. (a+b) के लिए द्विपद गुणांक ज्ञात कीजिए।

› यहाँ घात (power) 'n' = 4 है। हमें C सूत्र का उपयोग करना है, जहाँ 'r' की वैल्यू 0 से n तक जाती है।

› पहला गुणांक: 'C = 4! / (0! * (4-0)!) = 4! / (1 * 4!) = 1'।

› दूसरा गुणांक: 'C = 4! / (1! * (4-1)!) = 4! / (1 * 3!) = (4 * 3!) / (1 * 3!) = 4'।

› तीसरा गुणांक: 'C = 4! / (2! * (4-2)!) = 4! / (2! * 2!) = (4 * 3 * 2 * 1) / ((2 * 1) * (2 * 1)) = 24 / 4 = 6'।

› चौथा गुणांक: 'C = 4! / (3! * (4-3)!) = 4! / (3! * 1!) = (4 * 3!) / (3! * 1) = 4'।

› पाँचवाँ गुणांक: 'C = 4! / (4! * (4-4)!) = 4! / (4! * 0!) = 1'।

› तो, (a+b) के गुणांक 1, 4, 6, 4, 1 हैं।

उत्तर – (a+b) के गुणांक हैं: 1, 4, 6, 4, 1।

उदाहरण 5. द्विपद प्रमेय का उपयोग करके $(2x + 3y)^3$ का विस्तार कीजिए।

› यहाँ a = 2x, b = 3y और n = 3 है।

› सूत्र है: $(a+b) = Ca + Ca^1b^1 + Ca^2b^2 + Ca^3b^3$

› पहले पद के लिए: $^3C(2x)^3(3y) = 1 * (8x^3) * 1 = 8x^3$

› दूसरे पद के लिए: $^3C(2x)^2(3y)^1 = 3 * (4x^2) * (3y) = 36x^2y$

› तीसरे पद के लिए: $^3C(2x)^1(3y)^2 = 3 * (2x) * (9y^2) = 54xy^2$

› चौथे पद के लिए: $^3C(2x)(3y)^3 = 1 * 1 * (27y^3) = 27y^3$

› सभी पदों को जोड़ दें।

उत्तर – $(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

उदाहरण 6. गणितीय आगमन सिद्धांत का प्रयोग करते हुए सिद्ध करें कि द्विपद प्रमेय (a+b)^n के लिए सत्य है, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

› स्टेप 1: n = 1 के लिए सिद्ध करना है।

› P(1): (a+b)^1 = 1C0 a^1 b^0 + 1C1 a^0 b^1 = (1 * a * 1) + (1 * 1 * b) = a + b।

› चूंकि (a+b)^1 = a+b होता है, तो P(1) सत्य है।

› स्टेप 2: n = k के लिए सत्य मानना है।

› माना P(k) किसी धनात्मक पूर्णांक k के लिए सत्य है, अर्थात (a+b)^k = kC0 a^k + kC1 a^(k-1) b + ... + kCk b^k। इसे समीकरण (1) मान लेते हैं।

› स्टेप 3: n = k+1 के लिए सिद्ध करना है।

› हमें सिद्ध करना है कि P(k+1) भी सत्य है, अर्थात (a+b)^(k+1) = (k+1)C0 a^(k+1) + (k+1)C1 a^k b + ... + (k+1)C(k+1) b^(k+1)।

› हम (a+b)^(k+1) को (a+b) * (a+b)^k लिख सकते हैं।

› समीकरण (1) से (a+b)^k का मान रखने पर:

› (a+b)^(k+1) = (a+b) * [kC0 a^k + kC1 a^(k-1) b + ... + kC(k-1) a b^(k-1) + kCk b^k]

› अब, 'a' और 'b' से गुणा करें और पदों को एक साथ लाएँ (ध्यान से देखना):

› a * [kC0 a^k + kC1 a^(k-1) b + ... + kC(k-1) a b^(k-1) + kCk b^k] + b * [kC0 a^k + kC1 a^(k-1) b + ... + kC(k-1) a b^(k-1) + kCk b^k]

› = kC0 a^(k+1) + kC1 a^k b + ... + kC(k-1) a^2 b^(k-1) + kCk a b^k +

› kC0 a^k b + kC1 a^(k-1) b^2 + ... + kC(k-1) a b^k + kCk b^(k+1)

› अब समान घात वाले पदों को एक साथ 'group' करें:

› = kC0 a^(k+1) + (kC1 + kC0) a^k b + (kC2 + kC1) a^(k-1) b^2 + ... + (kCk + kC(k-1)) a b^k + kCk b^(k+1)

› हमें पता है कि 'kCr + kC(r-1) = (k+1)Cr' (Pascal's Identity) होता है।

› और kC0 = 1 = (k+1)C0, तथा kCk = 1 = (k+1)C(k+1) होता है।

› इन 'identities' का उपयोग करने पर:

› = (k+1)C0 a^(k+1) + (k+1)C1 a^k b + (k+1)C2 a^(k-1) b^2 + ... + (k+1)Ck a b^k + (k+1)C(k+1) b^(k+1)

› यह ठीक वही है जो हमें P(k+1) के लिए सिद्ध करना था।

› तो, यदि P(k) सत्य है, तो P(k+1) भी सत्य है।

› गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा, P(n) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिए सत्य है।

उत्तर – द्विपद प्रमेय गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. द्विपद व्यंजक (2x - 3y)^4 के प्रसार में कुल कितने पद होंगे? 'x' और 'y' की घातों का पैटर्न और प्रत्येक पद में उनका योग भी बताएँ।

› यहाँ 'n' का मान 4 है।

› पहला गुण: पदों की संख्या = n + 1 = 4 + 1 = 5.

› दूसरा और तीसरा गुण: 'a' की जगह '2x' और 'b' की जगह '-3y' है। '2x' की घात 4 से शुरू होकर 0 तक घटेगी (4, 3, 2, 1, 0), और '-3y' की घात 0 से शुरू होकर 4 तक बढ़ेगी (0, 1, 2, 3, 4)।

› चौथा गुण: प्रत्येक पद में 'x' और 'y' की घातों का योग हमेशा 'n' के बराबर, यानी 4 होगा।

› उदाहरण के लिए, पहले पद में (2x)^4 (-3y)^0, घातों का योग 4+0=4। दूसरे पद में (2x)^3 (-3y)^1, घातों का योग 3+1=4।

› यह पैटर्न सभी 5 पदों में चलेगा।

उत्तर – इस प्रसार में कुल 5 पद होंगे। 'x' की घात 4 से 0 तक घटेगी और 'y' की घात 0 से 4 तक बढ़ेगी। प्रत्येक पद में 'x' और 'y' की घातों का योग हमेशा 4 होगा।

उदाहरण 8. (2 - 3x) का प्रसार कीजिए।

› यहाँ हम '(x - y)' वाली विशिष्ट स्थिति का उपयोग करेंगे, जहाँ 'x = 2', 'y = 3x' और 'n = 4' है।

› सूत्र है: $nC0x - nC1x^1y + nC2x^2y^2 - nC3x^3y^3 + nCnxy$

› मान रखने पर: $4C0(2) - 4C1(2)^3(3x) + 4C2(2)^2(3x)^2 - 4C3(2)^1(3x)^3 + 4C4(3x)$

› गुणांकों का मान निकालते हैं: 4C0 = 1, 4C1 = 4, 4C2 = 6, 4C3 = 4, 4C4 = 1

› अब मान रखकर हल करते हैं: $1 * 16 - 4 * 8 * 3x + 6 * 4 * 9x^2 - 4 * 2 * 27x^3 + 1 * 81x$

› यह होगा: $16 - 96x + 216x^2 - 216x^3 + 81x$

उत्तर – $(2 - 3x) = 16 - 96x + 216x^2 - 216x^3 + 81x$

उदाहरण 9. (2x + 3) का द्विपद प्रमेय का उपयोग करके विस्तार कीजिए।

› सबसे पहले 'identify' करें कि a, b और n क्या हैं। यहाँ a = 2x, b = 3, और n = 4।

› अब द्विपद प्रमेय का 'formula' लगाएं: $(a + b) = nCa + nCa^1b + nCa^2b^2 + nCa^3b^3 + nCab$।

› पहले पद के लिए: $4C(2x)(3) = 1 \times (16x) \times 1 = 16x$।

› दूसरे पद के लिए: $4C(2x)^3(3)^1 = 4 \times (8x^3) \times 3 = 96x^3$।

› तीसरे पद के लिए: $4C(2x)^2(3)^2 = 6 \times (4x^2) \times 9 = 216x^2$।

› चौथे पद के लिए: $4C(2x)^1(3)^3 = 4 \times (2x) \times 27 = 216x$।

› पांचवें पद के लिए: $4C(2x)(3) = 1 \times 1 \times 81 = 81$।

उत्तर – $(2x + 3) = 16x + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

उदाहरण 10. द्विपद प्रमेय का उपयोग करके $(101)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, $(101)^3$ को $(100 + 1)^3$ के रूप में लिखेंगे। यहाँ 'a = 100', 'b = 1' और 'n = 3' है।

› अब द्विपद प्रमेय का सूत्र $(a+b)^3 = {}^3Ca^3 + {}^3Ca^2b + {}^3Cab^2 + {}^3Cb^3$ लगाएंगे।

› मान रखेंगे: ${}^3C(100)^3 + {}^3C(100)^2(1) + {}^3C(100)(1)^2 + {}^3C(1)^3$।

› ${}^3C = 1$, ${}^3C = 3$, ${}^3C = 3$, ${}^3C = 1$ होता है।

› तो, $1 \times (100)^3 + 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 + 1 \times (1)^3$।

› गणना करेंगे: $1 \times 1000000 + 3 \times 10000 \times 1 + 3 \times 100 \times 1 + 1 \times 1$।

› यह हो जाएगा: 1000000 + 30000 + 300 + 1।

› इन सबको जोड़ेंगे: 1030301।

उत्तर – $(101)^3 = 1030301$

उदाहरण 11. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि 9^(n+1) - 8n - 9, 64 से विभाज्य है, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

› हमें सिद्ध करना है कि 9^(n+1) - 8n - 9 = 64k, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

› हम 9^(n+1) को (1+8)^(n+1) के रूप में लिखेंगे।

› अब द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके (1+8)^(n+1) का विस्तार करेंगे: (n+1)C0 * 1^(n+1) * 8^0 + (n+1)C1 * 1^n * 8^1 + (n+1)C2 * 1^(n-1) * 8^2 + ... + (n+1)C(n+1) * 1^0 * 8^(n+1)

› इसे सरल करने पर: 1 + (n+1) * 8 + (n+1)n/2 * 64 + (n+1)C3 * 8^3 + ... + 8^(n+1)

› तो, 9^(n+1) = 1 + 8n + 8 + 64 * [(n+1)n/2 + (n+1)C3 * 8 + ...]

› इसे और सरल करें: 9^(n+1) = 9 + 8n + 64 * [(n+1)n/2 + (n+1)C3 * 8 + ...]

› अब 9^(n+1) - 8n - 9 के मान में इसे रखें: [9 + 8n + 64 * {...}] - 8n - 9

› हमें मिलता है: 64 * [(n+1)n/2 + (n+1)C3 * 8 + ...]

› चूंकि यह पूरा व्यंजक 64 के गुणज के रूप में है, यह 64 से विभाज्य है। जहाँ k = (n+1)n/2 + (n+1)C3 * 8 + ... एक पूर्णांक है।

उत्तर – सिद्ध किया कि 9^(n+1) - 8n - 9, 64 से विभाज्य है।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में सीधे प्रश्न के रूप में कम आती है, लेकिन यह द्विपद प्रमेय के बाकी सभी प्रश्नों की नींव है, इसलिए इसे समझना बहुत ज़रूरी है.

• यह भाग सीधा परीक्षा में सवाल के रूप में कम आता है, पर यह द्विपद प्रमेय के बड़े सवालों को हल करते समय 'double-check' करने में मदद करता है। अपने उत्तरों की वैधता जांचने के लिए इन गुणों का उपयोग करें।

• बोर्ड परीक्षा में सीधे-सीधे पास्कल त्रिभुज बनाने या उसके गुणांकों का उपयोग करके छोटे द्विपद विस्तार (जैसे घात 4 या 5 तक) करने वाले प्रश्न आ सकते हैं। इसकी संरचना को अच्छे से समझ लो।

• यह विषय बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि द्विपद प्रमेय के किसी भी प्रश्न में गुणांक निकालने के लिए 'Cr' सूत्र का उपयोग होता है, और इसके बिना आप विस्तार नहीं कर पाएंगे।

• यह सूत्र सीधे-सीधे बोर्ड परीक्षा में पूछा जाता है और इस पर आधारित प्रश्न भी आते हैं। इसकी एक-एक टर्म को समझना और याद रखना बहुत ज़रूरी है।

• यह उपपत्ति सीधे परीक्षा में 5 या 6 अंकों के लिए आ सकती है, इसलिए 'steps' को ध्यान से समझना और 'Pascal's Identity' का सही उपयोग करना ज़रूरी है। हर स्टेप को स्पष्ट रूप से लिखिना।

• यह अवधारणा सीधे सवालों में तो कम आती है, लेकिन 'medium' और 'hard' लेवल के 'binomial theorem' के सवालों को हल करते समय ये 'properties' बहुत काम आती हैं, खासकर जब आपको किसी 'particular term' में 'variables' की 'powers' को पहचानना हो।

• बोर्ड परीक्षा में इन विशिष्ट स्थितियों पर आधारित सीधे प्रश्न अक्सर आते हैं। चिन्हों की गलती से बचने के लिए 'minus' की घातों का नियम हमेशा याद रखना।

• बोर्ड परीक्षा में, 'calculations' में गलती से बचने के लिए 'binomial coefficients' (nCr) और 'powers' को बहुत ध्यान से 'solve' करना।

• यह भाग परीक्षा में 'application based questions' के रूप में आ सकता है, जहाँ आपको किसी बड़ी संख्या की घात निकालने के लिए द्विपद प्रमेय का उपयोग करना होगा। स्टेप्स को ध्यान से लिखना और गणना में सावधानी बरतना बहुत ज़रूरी है।

एक नज़र में रिवीज़न

› उच्च घातों के द्विपद विस्तार को आसान बनाता है.

› पदों की संख्या = घात + 1; a की घात घटती, b की घात बढ़ती; हर पद में घातों का योग = मूल घात।

› पास्कल त्रिभुज: द्विपद गुणांकों का पैटर्न, ऊपर के पदों का योग

› द्विपद गुणांक = संचय (Cr); n घात, r 0 से n तक।

› (a+b) का वस्तिार: Ca + ... + Cb, घातों का योग 'n' रहता है।

› द्विपद प्रमेय की उपपत्ति गणितीय आगमन सिद्धांत (n=1, n=k सत्य, n=k+1 सिद्ध) से की जाती है।

› पदों की संख्या (n+1), a की घात घटती, b की घात बढ़ती, घातों का योग n।

› द्विपद प्रमेय के विशेष रूप: (x-y) में एकांतर चिन्ह; (1+x), (1-x) के सरल प्रसार।

› द्विपद विस्तार: (a+b) में a, b, n की सही पहचान कर सूत्र लगाना।

› द्विपद प्रमेय से (a±b) के रूप में संख्यात्मक गणनाएँ सरल होती हैं।